PHYSICS

1. पृष्ठ-तनाव एक आण्विक घटना (molecular phenomenon) है, क्योंकि यह मूल रूप से द्रव की स्वतन्त्र पृष्ठ पर रहने वाले द्रव के अणुओं के बीच क्रियाशील अन्तराआण्विक आकर्षण बल (intermolecular attractive force) है।

2. क्योंकि पृष्ठ-तनाव, द्रव के स्वयं के ही अणुओं के बीच क्रियाशील अन्तराआण्विक बल है, अत: यह संसंजक आण्विक बलों से ही उत्पन्न होता है।

3. जब कोई आह्य बल नहीं होता, एक छोटी द्रव की बूँद की आकृति केवल पृष्ठ-तनाव से नियन्त्रित होती है। पृष्ठ-तनाव के गुण के कारण, द्रव का पृष्ठ सदैव सिकुड़कर अपना क्षेत्रफल सम्भावित न्यूनतम करने का प्रयास करता है (ताकि स्थितिज ऊर्जा न्यूनतम हो तथा बूँद स्थायी हो) पृष्ठ तथा द्रव के एक ज्ञात आयतन के लिये पृष्ठ क्षेत्रफल एक गोलाकार आकृति के लिये ही न्यूनतम होता है।

4. द्रव की किसी बूँद की आकृति वास्तव में दो कारकों (factors) से नियन्त्रित होती है—(i) पृष्ठ-तनाव बल एवं (ii) गुरुत्वीय बल

(a) **जब बूँद का आकार छोटा होता है—**

पृष्ठ-तनाव बल > गुरुत्वीय बल

अर्थात् परिणामी बल पृष्ठ-तनाव के कारण है। ऐसी स्थिति में, स्थितिज ऊर्जा न्यूनतम होती है जब पृष्ठ क्षेत्रफल न्यूनतम हो, जोकि सम्भव है जब बूँदें गोलाकार हों।

(b) **जब बूँद का आकार बड़ा होता है—**

गुरुत्वीय बल > पृष्ठ-तनाव बल

अर्थात् परिणामी बल गुरुत्वीय बल के कारण है। ऐसी स्थिति में, स्थितिज ऊर्जा न्यूनतम होती है जब बूँद का गुरुत्व केन्द्र न्यूनतम सम्भव ऊँचाई पर हो। अत: बूँद अब गोलाकार नहीं रह पाती वरन् चपटी हो जाती है।

7. चूँकि छोटे बुलबुले के अन्दर दाब, बड़े बुलबुले के अन्दर दाब से अधिक है (क्योंकि बुलबुले के अन्दर आधिक्य दाब इसकी त्रिज्या के विलोमानुपाती होता है), अत: हवा छोटे बुलबुले से बड़े बुलबुले में प्रवाहित होती है तथा बड़ा बुलबुला छोटे बुलबुले के आधार पर आकार में बढ़ता है।

8. जब n छोटी बूँदें संलीन होकर त्रिज्या R की एक बड़ी बूँद बनाती हैं, तब सदैव ऊर्जा मुक्त होती है। माना कि मुक्त होने वाली ऊर्जा ΔW है। तब—

$$\Delta W = T[A_i - A_f] = T[n \cdot 4\pi r^2 - 4\pi R^2]$$

समतुल्य ऊष्मा (heat equivalent)

$$\Delta Q = \frac{\Delta W}{J} = \frac{T}{J}[n \cdot 4\pi r^2 - 4\pi R^2] \quad ...(1)$$

यदि ताप में वृद्धि ΔQ हो, तो

$$\Delta Q = msdQ$$
$$= \left(\frac{4}{3}\pi R^3 \times 1\right) \times 1 \times d\theta = \frac{4}{3}\pi R^3 d\theta \quad ...(2)$$

($\because d =$ पानी का घनत्व $=1$ ग्राम/सेन्टीमीटर^3 तथा $s =$ पानी की विशिष्ट ऊष्मा $= \frac{1 \text{ कैलोरी}}{\text{ग्राम}\,^\circ\text{C}}$)

समीकरण (1) एवं (2) से,

$$\frac{4}{3}\pi R^3 d\theta = \frac{T}{J} \cdot 4\pi R^2 \left[\frac{nr^2}{R^2} - 1\right]$$

$$\therefore \quad d\theta = \frac{3T}{JR}\left[\frac{nr^2}{R^2} - 1\right] = \frac{3T}{J}\left[\frac{nr^2}{R^3} - \frac{1}{R}\right]$$

अब, n छोटी बूँदों का कुल आयतन बड़ी बूँद के आयतन के बराबर है। अत:

$$n \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{या} \quad nr^3 = R^3$$

$$\therefore \quad d\theta = \frac{3T}{J}\left[\frac{nr^2}{nr^3} - \frac{1}{R}\right] = \frac{3T}{J}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right]$$

10. $$W = T \cdot \Delta A = T(2 \times 4\pi R^2)$$

तथा $$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

जब आयतन दोगुना हो जाता है, नयी त्रिज्या हो जाती है—

$$R' = (2)^{1/3} R$$

$$\therefore \quad W' = T \times 2 \times 4\pi R'^2$$
$$= T \times 2 \times 4\pi (2)^{2/3} R^2$$
$$= T \times 2 \times 4\pi (4)^{1/3} R^2 = (4)^{1/3} W$$

11. हम जानते हैं कि जब भाग A में सुईं की नोक से छेद कर देते हैं, तब भाग B की ओर फिल्म पृष्ठ-तनाव के कारण सिकुड़कर न्यूनतम क्षेत्रफल धारण करती है। अत: धागा A की ओर अवतल हो जाता है।

12. $R = 5$ सेन्टीमीटर, $T = 75$ डाइन/सेन्टीमीटर, चपटी प्लेट की परिधि $= L = 2\pi R = 10\pi$ सेन्टीमीटर

अत: $$T = \frac{F}{L}$$

या $$F = TL = 75 \times 10\pi = 750\pi \text{ डाइन}$$

13. माना कि संलीन होने से पहले साबुन के दो बुलबुलों की त्रिज्याएँ a एवं b हैं तथा संलीन होने के बाद बड़े बुलबुले की त्रिज्या c है।

$$\therefore \quad P_a = P_0 + \frac{4T}{a}, \quad V_a = \frac{4}{3}\pi a^3$$
$$P_b = P_0 + \frac{4T}{b}, \quad V_b = \frac{4}{3}\pi b^3$$
$$P_c = P_0 + \frac{4T}{c}, \quad V_c = \frac{4}{3}\pi c^3$$

जहाँ P_0 वायुमण्डलीय दाब है।

अब, चूँकि द्रव्यमान संरक्षित रहता है, अत:

$$\mu_a + \mu_b = \mu_c$$
$$\frac{P_a V_a}{RT_a} + \frac{P_b V_b}{RT_b} = \frac{P_c V_c}{RT_c}$$

नियत ताप पर,

$$P_a V_a + P_b V_b = P_c V_c$$
$$\left(P_0 + \frac{4T}{a}\right)\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) + \left(P_0 + \frac{4T}{b}\right)\left(\frac{4}{3}\pi b^3\right) = \left(P_0 + \frac{4T}{c}\right)\left(\frac{4}{3}\pi c^3\right)$$

या $$4T(a^2 + b^2 - c^2) = P_0(c^3 - a^3 - b^3)$$

या $$\frac{4T}{3} \cdot 4\pi(a^2 + b^2 - c^2) = P_0 \cdot \frac{4\pi}{3}(c^3 - a^3 - b^3)$$

या $$\frac{4T}{3} \cdot S = -P_0 V$$

या $$4ST + 3P_0 V = 0$$

16. जब साबुन के बुलबुले को आवेश दिया जाता है, तो पृष्ठ के विभिन्न भागों के बीच पारस्परिक प्रतिकर्षण (mutual repulsion) के कारण साबुन के बुलबुले के आकार में वृद्धि होती है।

20. चूँकि साबुन के दो बुलबुले ताप में बिना किसी परिवर्तन के निर्वात् में संलीन होते हैं अत: न तो ऊर्जा मुक्त होती है व न ही अवशोषित होती है। इसका अर्थ है कि पृष्ठ क्षेत्रफल में कोई परिवर्तन नहीं होता। अत:

$$8\pi r^2 + 8\pi r^2 = 8\pi R^2$$

या $$R^2 = 2r^2 \quad \text{या} \quad R = \sqrt{2}\, r$$

21. त्रिज्या r_1 एवं r_2 ($r_1 < r_2$) के साबुन के दो बुलबुले पास आते हैं एवं एक दोहरा बुलबुला (double bubble) बनाते हैं। माना कि T द्रव का पृष्ठ-तनाव प्रदर्शित करता है तथा P वायुमण्डलीय दाब है। छोटे बुलबुले के अन्दर दाब $= P + \frac{4T}{r_1}$

बड़े बुलबुले के अन्दर दाब $= P + \frac{4T}{r_2}$

$$\text{दाबान्तर} = 4T\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

अब दोनों बुलबुलों को अलग करने वाली साबुन की फिल्म के अवतल पार्श्व पर दाब, उत्तल पार्श्व की दाब की तुलना में $4T/R$ से अधिक होता है। अत:

$$\frac{4T}{R} = 4T\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

या, $\frac{1}{R} = \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$ या $R = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$

22. पानी के अन्दर गहराई h पर दाब या बुलबुले के बाहर दाब $= P + hdg$
चूँकि हवा के बुलबुले के अन्दर आधिक्य दाब $= \frac{2T}{r}$
$\therefore$ हवा के बुलबुले के अन्द्रर दाव $= P + hdg + \frac{2T}{r}$

23. एक कृत्रिम उपग्रह में, भारहीनता की अवस्था पायी जाती है। अत: पानी केशनली में पूरी लम्बाई तक ऊपर उठेगा तथा अधिक वक्रता त्रिज्या का नया पृष्ठ बनाएगा परन्तु बाहर नहीं आयेगा।

26. जब मोम का लेप कर दिया जाता है, तो स्पर्श कोण बढ़ जाता है। फलस्वरूप द्रव का तल गिर जाता है, अर्थात्

$$h_2 < h_1$$

27. इसका भार, पृष्ठ-तनाव बल से कम या बराबर होना चाहिए।
$\therefore$ $F = 2LT = 2 \times 7.5 \times 70 = 1{,}050$ डाईन
$\therefore$ सुई का भार $= \frac{F}{g} = \frac{1050}{980} = 1.07$ ग्राम-भार

28. तार का भार = पृष्ठ-तनाव बल

$$\pi r^2 ldg = T \times 2l$$

या $\frac{22}{7} \times r^2 \times 8 \times 980 = 70 \times 2$

$\therefore$ $r = \sqrt{\frac{7 \times 70 \times 2}{22 \times 8 \times 980}} = 0.75$ मिलीमीटर

$\therefore$ तार का व्यास $= 2r = 1.5$ मिलीमीटर

29. फ्रेम का क्षेत्रफल $= 4 \times 10^{-3}$ मीटर^2
साबुन की फिल्म का क्षेत्रफल $= 2 \times 4 \times 10^{-3}$ मीटर^2
फिल्म की स्थितिज ऊर्जा
= पृष्ठ-तनाव $\times$ फिल्म का क्षेत्रफल
$= 40 \times 10^{-3} \times 2 \times 4 \times 10^{-3} = 32 \times 10^{-5}$ जूल
जब फिल्म का क्षेत्रफल घटाकर आधा कर दिया जाता है, तो फिल्म की स्थितिज ऊर्जा $= 40 \times 10^{-3} \times 4 \times 10^{-3} = 16 \times 10^{-5}$ जूल
$\therefore$ स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन $= 16 \times 10^{-5}$ जूल

CHEMISTRY

31. (*d*)

32. (*c*) हम जानते है कि $\Delta E = q + W$

यदि ऊष्मा वातावरण से ली गई है तो $q = 0$

अतः $\Delta E = W$

अर्थात कार्य आन्तरिक ऊर्जा के सापेक्ष किया गया है तथा $q = 0$ होता है रूद्धोष्म प्रक्रम के लिये।

33. (*c*) ऊष्मागतिकी के अन्तर्गत ऊर्जा परिवर्तन, सुसंगतता, क्रिया के विस्तार आदि का अध्ययन करते हैं परन्तु गति तथा क्रियाविधि का अध्ययन नहीं करते हैं।

34. (*c*)

35. (*a*) $W = 2.303\, nRT \log \dfrac{p_2}{p_1}$

$$= 2.303 \times 1 \times 2 \times 300 \log \frac{10}{2} = 965.84$$

निश्चित ताप पर, $\Delta E = 0$

$$\Delta E = q + W;$$

$$q = -W = -965.84 \text{ कैलोरी}$$

36. (*c*) दिया गया है; $q = +701$ जूल

(ऊष्मा का शोषण,अतः q धनात्मक होगी)

$W = -394$ जूल (तन्त्र द्वारा किया गया कार्य,अतः W ऋणात्मक)

ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम से

आन्तरिक ऊर्जा में परिवर्तन, $\Delta E = q + W$

$= +701$ जूल $+ (-394$ जूल$) = +307$ जूल

37. (*a*) एक विलगित तन्त्र के लिये, कोई ऊर्जा परिवर्तन नहीं; ऊष्मा एवं कार्य में अतः ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम से

$$\Delta U = q + W$$

$$\Delta U = 0 + 0 = 0$$

38. (*c*) मुक्त प्रसार में, $W = 0$

रूद्धोष्म प्रक्रम में, $q = 0$

$$\Delta U = q + W = 0$$

इसका अर्थ है आन्तरिक ऊर्जा स्थिर रहेगी

अतः $\Delta T = 0$

आदर्श गैस में अन्तर आणविक आकर्षण नहीं होता

अतः इस प्रकार की गैस का रूद्धोष्म परिवर्तन होता है तो निर्वात में; कोई ऊष्मा अवशोषित या मुक्त नहीं होती है क्योंकि अणुओं को अलग-अलग करने के लिये कोई कार्य नहीं करना पड़ता है।

39. (*d*) जैसा कि प्रक्रम में अवस्था परिवर्तन होता है तथा ऊष्मा का शोषण होता है अतः

$$Q = \text{संहति} \times \text{वाष्पन की गुप्त ऊष्मा}$$

दिया है, संहति $= 70.0$ ग्राम $= 0.07$ किलोग्राम

$L_v = 2260$ किलोजूल प्रति किलोग्राम

$Q = 0.07 \times 2260$ किलोजूल

$= 158.2$ किलोजूल $= 158200$ जूल

40. (*a*) जैसा कि चित्र से स्पष्ट है कि प्रक्रम अनन्त पदों में पूरा हुआ है। अतः यह समतापीय उत्क्रमणीय प्रसार है।

$$W = -2.303 nRT \log \frac{V_2}{V_1}$$

परन्तु $p_1V_1 = p_2V_2 \Rightarrow \dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{2}{1} = 2$

$\therefore$ $W = -2.303 nRT \log \dfrac{p_1}{p_2}$

$= -2.303 \times 1$ मोल $\times 8.314$ जूल मोल$^{-1}$

केल्विन$^{-1} \times 298$ केल्विन$^{-1} \times \log 2$

$= -2.303 \times 8.314 \times 298 \times 0.3010$ जूल

$= -1717.46$ जूल

41. (*c*) $W = -p_{\text{बाह्य}}(V_f - V_i) = -2 \times 40 = -80$ ली-बार

$= -8$ किलोजूल

ऋणात्मक चिन्ह प्रदर्शित करता है कार्य तन्त्र द्वारा वातावरण पर किया गया है। अधिक कार्य किया गया है उत्क्रमणीय प्रसार में, क्योंकि आन्तरिक दाब तथा बाह्य दाब प्रत्येक पद पर समान रहते हैं।

42. (*d*) उत्पादन की मानक ऐन्थैल्पी की परिभाषा के अनुसार, $H_2O(l)$ की उत्पादन की मानक ऐन्थैल्पी निम्न रसायनिक समीकरण के द्वारा ज्ञात करते हैं

$$H_2(g) + \frac{1}{2}O_2(g) \longrightarrow H_2O(l)$$

या $H_2O(l)$ की मानक उत्पादन की ऐन्थैल्पी $\frac{1}{2}\Delta_r H^\ominus$ होगी

अतः $\Delta_f H^\ominus_{H_2O}(l) = \dfrac{1}{2} \times \Delta_r H^\ominus = \dfrac{-572 \text{ किलोजूल/मोल}^{-1}}{2}$

$= -286$ किलोजूल प्रति मोल

43. (*c*) $CH_4(g) + 2O_2(g) \longrightarrow CO_2(g) + 2H_2O(l)$

$$\Delta n_g = (n_p - n_r) = 1 - 3 = -2$$

$$\Delta H° = \Delta U° + \Delta n_g RT$$

$$\Delta H° = -X - 2RT$$

अतः $\Delta H° < \Delta U°$

44. (*b*) ग्रेफाइट की आणविक ऐन्थैल्पी परिवर्तन, $\Delta H = 1$ ग्राम ग्रेफाइट की दहन ऐन्थैल्पी $\times$ ग्रेफाइट का अणुभार

$\Delta H = -20 \times 7$ किलोजूल /ग्राम $\times 12$ ग्राम मोल$^{-1}$

$= 2.48 \times 10^2$ किलोजूल मोल$^{-1}$

ऋणात्मक चिन्ह ऊष्माक्षेपी क्रिया को प्रदर्शित करता है।

45. (*d*) अन्तिम ऐन्थैल्पी परिवर्तन, ΔH का मान चक्रीय प्रक्रम के लिये सदैव शून्य होता है क्योंकि ऐन्थैल्पी परिवर्तन अवस्था फलन होती है।

46. (*d*) कार्बन के दहन की क्रिया निम्न प्रकार है

$C(s) + O_2(g) \longrightarrow CO_2(g)$; $\Delta H = -393.5$ किलोजूल मोल$^{-1}$

12 ग्राम 32 ग्राम 44 ग्राम

अतः 44 ग्राम CO_2 में उत्पादन की ऊष्मा $= 393.5$ किलोजूल मोल$^{-1}$

अतः 35.2 ग्राम CO_2 में उत्पादन की ऊष्मा

$= \dfrac{393.5 \text{ किलोजूल} \times 35.2 \text{ ग्राम}}{44 \text{ ग्राम}} = 314.8$ किलोजूल

47. (*d*) समी (ii) – (i) से C(ग्रेफाइट) $\longrightarrow$ C (हीरा)

$$\Delta H = -393.4 - (-395.3) = +1.9$$

48. (*b*) समीकरण के लिये,

$$H_2 + S + 2O_2 \longrightarrow H_2SO_4$$

समी (I) + (II) + (III) + (IV)

$$\Delta H = -287.3 + (-298.2) + (-98.7) + (-130.2)$$

$= -814.4$ किलोजूल

49. (*a*) $q_p = \Delta H = -30.5$ किलोजूल मोल$^{-1}$

284 ग्राम CCl_4 के आवश्यक ऊष्मा

$= \dfrac{284 \text{ ग्राम}}{154 \text{ ग्राम मोल}^{-1}} \times 30.5$ किलोजूल मोल$^{-1} = 56.2$ किलोजूल

50. (*b*)

51. (*d*) चूँकि 18.0 ग्राम $H_2O = 1$ मोल H_2O

1 मोल H_2O को वाष्प में बदलने के लिये ऐन्थैल्पी परिवर्तन

$= 40.79$ किलोजूल

2 मोल H_2O को वाष्प में बदलने के लिये $= 2 \times 40.79$ किलोजूल

$= 81.58$ किलोजूल

अतः $100°$ सेन्टीग्रेड ताप तथा 1 बार दाब पर वाष्पन की मानक ऐन्थैल्पी

$\Delta_{\text{वाष्पन}} H^\circ = +40.79$ किलोजूल मोल$^{-1}$

52. (*c*) उदासीनीकरण की ऊष्मा कम होगी – 57.33 किलोजूल प्रति मोल से क्योंकि इसमें ऊष्मा की कुछ मात्रा MgO को तोड़ने में खर्च होगी। (चूँकि MgO एक दुर्बल क्षार है)

53. (*b*) CH_4 की आवश्यक मात्रा $= \dfrac{445.15 \times 16}{890.3} = 8$ ग्राम

54. (*c*) दी गई क्रिया में जब Cl_2 अणु दो गैसीय Cl परमाणुओं से बनता है तो बन्ध बनने में मुक्त ऊर्जा प्राप्त होती है। अतः $\Delta H =$ ऋणात्मक

इसमें ऐन्ट्रॉपी में कमी आती है क्योंकि क्लोरीन 2 परमाणु के ज्यादा अव्यवस्थित होते है क्लोरीन के एक अणु से । अतः $\Delta S =$ ऋणात्मक होगा।

55. (*d*) $4NO_2(g) + O_2(g) \longrightarrow 2N_2O_5(g);\ \Delta_r H = -111$ किलोजूल

$2N_2O_5(g) \longrightarrow 2N_2O_5(s), \Delta_s H = (-54 \times 2)$ किलोजूल

$4NO_2(g) + O_2(g) \longrightarrow 2N_2O_5(s),\ \Delta_r H = -219$ किलोजूल

56. (*b*) $\Delta G = \Delta H - T\Delta S$

साम्यावस्था में $\Delta G = 0$, जब क्रिया स्वतः स्फुर्त होगी तो ΔG का मान ऋणात्मक होगा,अतः T का मान T_e से ज्यादा होगा।

57. (*c*) $\frac{1}{2}X_2 + \frac{3}{2}Y_2 \longrightarrow XY_3$

$$\Delta S_{\text{अभिक्रिया}} = S_{\text{उत्पाद}} - S_{\text{अभिकारक}}$$

$$\Delta S_{\text{अभिक्रिया}} = 50 - \left(\frac{3}{2} \times 40 + \frac{1}{2} \times 60\right) = -40 \text{ जूल मोल}^{-1}$$

$$\Delta G = \Delta H - T\Delta S$$

साम्यावस्था में, $\Delta G = 0$

$\therefore \quad \Delta H = T\Delta S$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{\Delta H}{\Delta S} = \frac{30 \times 10^3}{40} = 750 \text{ केल्विन}$$

58. (*c*) $H_2O(l) \longrightarrow H_2O(g)$

$$\Delta n_g = 1 - 0 = 1$$

$$\Delta E = \Delta H - \Delta n_g RT$$

$$= 41 - 1 \times 8.3 \times 373 \times 10^{-3} \qquad (R = 8.3 \times 10^{-3})$$

$$= 37.9 \text{ किलोजूल मोल}^{-1}$$

59. (*a*) एक विलगित तन्त्र में जिसमें स्वतः प्रकम में वातावरण में संहति तथा ऊर्जा परिवर्तनीय नहीं हैं, ऐन्ट्रॉपी में परिवर्तन धनात्मक होगा।

60. (*b*) किसी यौगिक के 1 अणु का तापक्रम 1°C बढ़ाने के लिये जितनी ऊष्मा की आवश्यकता होती है उसे आणविक ऊष्माधारिता कहते हैं। जिसे निम्न सूत्र द्वारा व्यक्त किया जाता है

$$C = \frac{q}{T_2 - T_1}$$

61. (*b*) $(a+2x)^n$ के प्रसार में rवाँ पद $^nC_{r-1}(a)^{n-r+1}(2x)^{r-1}$

$$= \frac{n!}{(n-r+1)!(r-1)!}a^{n-r+1}(2x)^{r-1}$$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-r+2)}{(r-1)!}a^{n-r+1}(2x)^{r-1}$$

62. (*b*) $(1-x)^{-4} = 1\cdot x^0 + 4x^1 + \frac{4\cdot 5}{2}x^2 + \dots$

$$= \left[\frac{1\cdot2\cdot3}{6}x^0 + \frac{2\cdot3\cdot4}{6}x + \frac{3\cdot4\cdot5}{6}x^2 + \frac{4\cdot5\cdot6}{6}x^3 + \dots + \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{6}x^r + \dots\right]$$

$$T_{r+1} = \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{6}x^r$$

63. (*a*) $(1+a)^{m+n}$ के प्रसार का व्यापक पद निम्न है

$$T_{r+1} = {}^{m+n}C_r(a)^r$$

a^m के गुणांक के लिए, $r=m$ रखने पर,

$$T_{m+1} = {}^{m+n}C_m a^m$$

∴ a^m का गुणांक $= {}^{m+n}C_m$ ...(i)

a^n के गुणांक के लिए, $r=n$ रखने पर,

$$T_{n+1} = {}^{m+n}C_n a^n$$

a^n का गुणांक $= {}^{m+n}C_n = {}^{m+n}C_{m+n-n}$

$= {}^{m+n}C_m$ $\quad(\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r})$ ...(ii)

समी (i) व (ii) से, a^m का गुणांक $= a^n$ का गुणांक

64. (*c*) $(1+x)^{2n}$ के प्रसार में व्यापक पद $= {}^{2n}C_k x^k, 0 \le k \le 2n$

∵ $r>1, n>2$ के लिए ${}^{2n}C_{3r} = {}^{2n}C_{r+2}$

⇒ या तो $3r = r+2$ या $3r = 2n-(r+2)$ $\quad(\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r})$

⇒ $r=1$ या $n=2r+1$

∵ $r>1 \therefore n=2r+1$

65. (*b*) $(3+ax)^9$ के प्रसार में व्यापक पद निम्न है

$$T_{r+1} = {}^9C_r\, 3^{9-r}a^r x^r$$

x^2 के गुणांक के लिए $r=2$ रखने पर,

$$T_{2+1} = {}^9C_2\, 3^{9-2}a^2x^2 \quad ...(i)$$

∴ x^2 का गुणांक $= {}^9C_2\, 3^7 a^2$

x^3 के गुणांक के लिए $r=3$ रखने पर,

$$T_{3+1} = {}^9C_3\, 3^{9-3}a^3x^3$$
$$= {}^9C_3\, 3^6 a^3x^3$$

∴ x^3 का गुणांक $= {}^9C_3\, 3^6 a^3$ ...(ii)

प्रश्नानुसार, x^2 का गुणांक $= x^3$ का गुणांक

∴ ${}^9C_2\, 3^7a^2 = {}^9C_3\, 3^6a^3$ [समी (i) व (ii) से]

⇒ $\frac{9\times8}{2}\times3\times1 = \frac{9\times8\times7}{6}\times1\times a$

⇒ $\frac{3}{2} = \frac{7}{6}\times a \Rightarrow a = \frac{9}{7}$

66. (*c*) दिया है, $(1+x)^{24}$

माना दो क्रमागत बढ़ते पद $(r+1)$वाँ तथा $(r+2)$वाँ पद हैं

$$T_{r+1} = {}^{24}C_r x^r$$

तथा $T_{r+2} = {}^{24}C_{r+1}x^{r+1}$

अब, गुणांकों का अनुपात $= 1:4$

⇒ $\frac{{}^{24}C_r}{{}^{24}C_{r+1}} = \frac{1}{4}$

⇒ $\frac{r+1}{24-r} = \frac{1}{4} \Rightarrow r=4$

∴ अभीष्ट पद 5वाँ तथा 6वाँ पद होंगे।

67. (*b*) दिया हुआ व्यंजक $(1+x)^n$ है। दूसरे, तीसरे तथा चौथे पद के गुणांक क्रमशः ${}^nC_1$, ${}^nC_2$ तथा ${}^nC_3$ होंगे

चूँकि ${}^nC_1, {}^nC_2, {}^nC_3$ समान्तर श्रेणी में हैं

∴ $2\,{}^nC_2 = {}^nC_1 + {}^nC_3$.

⇒ $2 = \frac{{}^nC_1}{{}^nC_2} + \frac{{}^nC_3}{{}^nC_2}$

⇒ $2 = \frac{2}{n-1} + \frac{n-2}{3}$

⇒ $n^2 - 9n + 14 = 0$

⇒ $n = 2, 7$

लेकिन $n \ne 2$

अंतः $n = 7$

68. (*b*) यहाँ, $T_4 = {}^nC_3(a)^{n-3}(-2b)^3$

तथा $T_5 = {}^nC_4(a)^{n-4}(-2b)^4$

प्रश्नानुसार, $T_4 + T_5 = 0$

⇒ ${}^nC_3(a)^{n-3}(-2b)^3 + {}^nC_4(a)^{n-4}(-2b)^4 = 0$

⇒ $(a)^{n-4}(-2b)^3[a\,{}^nC_3 + {}^nC_4(-2b)] = 0$

⇒ $\frac{a}{b} = \frac{2\,{}^nC_4}{{}^nC_3}$

$= \frac{2\cdot n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\times\frac{3\cdot2\cdot1}{n(n-1)(n-2)}$

$= \frac{n-3}{2}$

69. (*a*) $(x + x^{\log_{10}x})^5$ के प्रसार में

$$T_3 = {}^5C_2\cdot x^2(x^{\log_{10}x})^3 = 10^6 \quad \text{(दिया है)}$$

$x=10$ रखने पर, $10^3\cdot10^3 = 10^6$ सन्तुष्ट होता है। अतः $x=10$

70. (*c*) दिया है, $T_1 = {}^nC_0 = 1$ ...(i)

$T_2 = {}^nC_1 ax = 6x$

⇒ $\frac{n!}{(n-1)!}a = 6 \Rightarrow na = 6$ ...(ii)

तथा $T_3 = {}^nC_2(ax)^2 = 16x^2$

⇒ $\frac{n(n-1)}{2}a^2 = 16$ ...(iii)

समी (ii) तथा (iii) को हल करने पर $a = \frac{2}{3}$ तथा $n = 9$ है।

71. (*a*) $\left(2^{1/3} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ के प्रसार में अन्तिम पद,

$$T_{n+1} = {}^nC_n(2^{1/3})^{n-n}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \quad ...(i)$$

$$= {}^nC_n(-1)^n\frac{1}{2^{n/2}} = \frac{(-1)^n}{2^{n/2}}$$

तथा दिया है, $T_{n+1} = \left(\frac{1}{3^{5/3}}\right)^{\log_3 8} = (3^{-5/3})\log_3 2^3$

$= (3^{-5/3})^3 \log_3 2$

$= 3^{\log_3 2^{-5}} = 2^{-5}$ ...(ii)

समी (i) व (ii) से,

$$\frac{(-1)^n}{2^{n/2}} = 2^{-5} \Rightarrow \frac{(-1)^n}{2^{n/2}} = \frac{(-1)^{10}}{2^5}$$

⇒ $\frac{n}{2} = 5 \Rightarrow n = 10$

अब, $T_5 = T_{4+1} = {}^{10}C_4(2^{1/3})^{10-4}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4$

$= \frac{10!}{4!6!}(2^{1/3})^6(-1)^4(2^{-1/2})^4$

$= 210(2)^2(1)(2^{-2}) = 210$

72. **(b)** $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{n-3}$ का व्यापक पद $= T_{r+1}$

$\therefore \quad T_{r+1} = {}^{n-3}C_r (x)^{n-3-r}\left(\frac{1}{x^2}\right)^r = {}^{n-3}C_r x^{n-3-3r}$

माना T_{r+1} वाँ पद $= x^{2k}$

तब, $\quad n-3-3r = 2k$

$\Rightarrow \quad 3(1+r) = n-2k$

$\Rightarrow n-2k, 3$ का गुणंक है।

73. **(c)** $\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3x}\right)^9$ के प्रसार में व्यापक पद

$$T_{r+1} = {}^9C_r\left(\frac{3}{2}x^2\right)^{9-r}\left(-\frac{1}{3x}\right)^r$$

$$= {}^9C_r\left(\frac{3}{2}\right)^{9-r}\left(-\frac{1}{3}\right)^r x^{18-3r} \quad \ldots(i)$$

अब, $\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3x}\right)^9$ में x^0, x^{-1} और x^{-3} के पदों के गुणांक निम्न है।

x^0 के लिए, $\quad 18-3r=0 \Rightarrow r=6$

x^{-1} के लिए, r का कोई पूर्णांक मान विद्यमान नहीं है।

x^{-3} के लिए, $18-3r=-3 \Rightarrow -3r=-21 \Rightarrow r=7$

$$(1+x+2x^3)\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3x}\right)^9$$

के प्रसार में x से स्वतन्त्र पद का गुणांक

$$= 1\cdot {}^9C_6(-1)^6\left(\frac{3}{2}\right)^{9-6}\left(\frac{1}{3}\right)^6 + 0 + 2\cdot {}^9C_7(-1)^7\left(\frac{3}{2}\right)^{9-7}\left(\frac{1}{3}\right)^7$$

$$= \frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{3^3}{2^3}\cdot\frac{1}{3^6} + 2\cdot\frac{9\cdot 8}{1\cdot 2}(-1)\frac{3^2}{2^2}\cdot\frac{1}{3^7}$$

$$= \frac{7}{18}-\frac{2}{27} = \frac{17}{54}$$

74. **(c)** $\left(\sqrt{x}-\frac{k}{x^2}\right)^{10}$ के प्रसार में

व्यापक पद, $T_{r+1} = {}^{10}C_r(\sqrt{x})^{10-r}\left(\frac{-k}{x^2}\right)^r$

$$= {}^{10}C_r\, x^{\frac{10-r}{2}-2r}(-k)^r = {}^{10}C_r(-k)^r x^{\frac{10-5r}{2}}$$

x से स्वतन्त्र पद के लिए,

$$\frac{10-5r}{2} = 0 \Rightarrow r=2$$

$r=2$ रखने पर, $\quad {}^{10}C_2(-k)^2 = 405$

$\Rightarrow \quad \frac{10\times 9}{2}\times k^2 = 405$

$\therefore \quad k = \pm 3$

75. **(b)** $(1-3x+7x^2)(1-x)^{16}$

$$= (1-3x+7x^2)({}^{16}C_0 - {}^{16}C_1x + {}^{16}C_2x^2 + \ldots)$$

गुणा करने के बाद x को समाहित करने वाला पद निम्न है

$$-{}^{16}C_1x - 3\times{}^{16}C_0x$$

$\therefore x$ का गुणांक $= -16-3 = -19$

76. **(a)** $\left(3x-\frac{2}{x^2}\right)^{15}$ के प्रसार में व्यापक पद

$$T_{r+1} = {}^{15}C_r(3x)^{15-r}\left(\frac{-2}{x^2}\right)^r$$

$$= {}^{15}C_r(3)^{15-r}(-2)^r x^{15-3r}$$

x के लिए स्वतन्त्र पद,

$15-3r=0 \Rightarrow r=5$

$\therefore r=5$ रखने पर, अभीष्ट पद $= {}^{15}C_5(3)^{15-5}(-2)^5$

$$= -3003\,(3^{10})\,(2^5)$$

77. **(b)** दिया है व्यंजक $= \left(x+\frac{1}{2x}\right)^{2n}$

$\therefore \quad$ मध्य पद $= {}^{2n}C_n(x)^n\left(\frac{1}{2x}\right)^n$

$$= \frac{2n!}{n!n!2^n} = \left\{\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots(2n-1)(2n)}{n!n!2^n}\right\}$$

$$= \frac{\{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)\}\{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n\}}{n!n!2^n}$$

$$= \frac{\{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)\}\{1\cdot 2\ldots n\}2^n}{n!n!2^n}$$

$$= \frac{\{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)\}n!}{n!n!} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{n!}$$

78. **(c)** $\left(\frac{1}{x}+x\sin x\right)^{10}$

यहाँ, $x=10$ (सम)

$\therefore \quad$ मध्य पद $= \left(\frac{10}{2}+1\right)$वाँ पद $=6$वाँ पद

$$T_6 = {}^{10}C_5\left(\frac{1}{x}\right)^{10-5}(x\sin x)^5$$

$\Rightarrow \quad 252(\sin x)^5 = \frac{63}{8}$

$\Rightarrow \quad (\sin x)^5 = \frac{1}{32}$

$\Rightarrow \quad \sin x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad \sin x = \sin\frac{\pi}{6}$

$\therefore \quad x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$

79. **(c)** दिया है, व्यंजक $\left(\frac{P}{2}+2\right)^8$

यहाँ, $n=8$ (सम)

तब, $\quad$ मध्य पद $= \left(\frac{8}{2}+1\right)$वाँ पद $=5$वाँ पद

$\therefore \quad T_5 = {}^8C_4\left(\frac{P}{2}\right)^{8-4}(2)^4 = 1120 \quad$ (दिया है)

$\Rightarrow \quad \frac{8\times 7\times 6\times 5}{4\times 3\times 2\times 1}\times\frac{P^4}{2^4}\times 2^4 = 1120$

$\Rightarrow \quad P^4 = 16$

$\therefore \quad P = \pm 2$

80. **(b)** $(1+x)^{50} = \sum_{r=0}^{50} {}^{50}C_r x^r$

$\therefore x$ की विषम घातों के गुणांकों का योग

$$= {}^{50}C_1 + {}^{50}C_3 + \ldots + {}^{50}C_{49}$$

$$= \frac{1}{2}[{}^{50}C_0 + {}^{50}C_1 + \ldots + {}^{50}C_{50}]$$

$$= \frac{1}{2}[2^{50}] = 2^{49}$$

81. (b) $(1+x)^{15} = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_{15}x^{15}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{(1+x)^{15}-1}{x} = C_1 + C_2x + \dots + C_{15}x^{14}$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{x\cdot 15(1+x)^{14} - (1+x)^{15} + 1}{x^2} = C_2 + 2C_3x + \dots + 14C_{15}x^{13}$$

$x=1$ रखने पर,

$$C_2 + 2C_3 + \dots + 14C_{15} = 15\cdot 2^{14} - 2^{15} + 1$$
$$= 13\cdot 2^{14} + 1$$

82. (c) $aC_0 - (a+d)C_1 + (a+2d)C_2 - \dots (n+1)$ पद

$= a(C_0 - C_1 + C_2 - \dots) + d(-C_1 + 2C_2 - 3C_3 + \dots) \quad \dots(i)$

हम जानते हैं कि,

$(1-x)^n = C_0 - C_1x + C_2x^2 - \dots + (-1)^n C_n x^n \quad \dots(ii)$

उपरोक्त समीकरण का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$-n(1-x)^{n-1} = -C_1 + 2C_2x - \dots + (-1)^n C_n n x^{n-1} \quad \dots(iii)$

समी (ii) व समी (iii) में $x=1$ रखने पर,

$C_0 - C_1 + C_2 - \dots + (-1)^n C_n = 0 \quad \dots(iv)$

तथा $\quad -C_1 + 2C_2 - \dots + (-1)^n nC_n = 0 \quad \dots(v)$

तब, समी (i) से, $aC_0 - (a+d)C_1 + (a+2d)C_2 \dots (n+1)$ पद

$= a\cdot 0 + d\cdot 0 = 0$ [समी (iv) व (v) से]

83. (c) $49^n + 16n - 1 = (1+48)^n + 16n - 1$

$= 1 + {}^nC_1(48) + {}^nC_2(48)^2 + \dots + {}^nC_n(48)^n + 16n - 1$

$= (48n + 16n) + {}^nC_2(48)^2 + {}^nC_3(48)^3 + \dots + {}^nC_n(48)^n$

$= 64n + 8^2[{}^nC_2\cdot 6^2 + {}^nC_3\cdot 6^3\cdot 8$

$\qquad + {}^nC_4\cdot 6^4\cdot 8^2 + \dots + {}^nC_n\cdot 6^n\cdot 8^{n-2}]$

अतः $49^n + 16n - 1$, 64 से भाज्य है।

84. (a) $\because \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 3, \forall\, n > 3$

अब, $\quad \dfrac{(1001)^{999}}{(1000)^{1000}} = \dfrac{1}{1001}\cdot\left(\dfrac{1001}{1000}\right)^{1000}$

$$= \frac{1}{1001}\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} < \frac{1}{1001}\cdot 3 < 1$$

$$(1001)^{999} < (1000)^{1000}$$

अतः $\quad B < A$ या $A > B$

85. (a) $(217)^{1/3} = (6^3+1)^{1/3} = 6\left(1+\dfrac{1}{6^3}\right)^{1/3}$

$\therefore \quad 6\left(1+\dfrac{1}{6^3}\right)^{1/3} = 6\left\{1 + \dfrac{1}{3\times 216} - \dfrac{1\times 2}{3\times 3\times 2}\left(\dfrac{1}{216}\right)^2 + \dots\right\}$

$= 6\left(1+\dfrac{1}{648}\right)$ (अन्य पदों को छोड़ने पर)

$= 6.01$

86. (d) $\dfrac{1}{(x-1)^2(x-2)} = \dfrac{1}{-2(1-x)^2\left(1-\dfrac{x}{2}\right)}$

$$= -\frac{1}{2}\left[(1-x)^{-2}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[(1+2x+\dots)\left(1+\frac{x}{2}+\dots\right)\right]$$

अतः नियतांक पद का गुणांक $-\dfrac{1}{2}$ होगा।

87. (d) $\dfrac{1}{(4-3x)^{1/2}}$ को $4^{-1/2}\left(1-\dfrac{3}{4}x\right)^{-1/2}$ लिखा जा सकता है जोकि वैध होगा, यदि $\left|\dfrac{3}{4}x\right| < 1$

$\Rightarrow \quad -\dfrac{4}{3} < x < \dfrac{4}{3}$

88. (b) $\dfrac{1}{(6-3x)^{1/3}} = (6-3x)^{-1/3} = 6^{-1/3}\left[1-\dfrac{x}{2}\right]^{-1/3}$

$$= 6^{-1/3}\left[1 + \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{x}{2}\right) + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)}{2\cdot 1}\left(-\frac{x}{2}\right)^2 + \dots\right]$$

$$= 6^{-1/3}\left[1 + \frac{x}{6} + \frac{2x^2}{6^2} + \dots\right]$$

89. (b) $\dfrac{\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{(1-x)^2}}{1+x+\sqrt{1+x}} = \dfrac{(1+x)^{1/2} + (1-x)^{2/3}}{1+x+(1+x)^{1/2}}$

$$= \frac{\left[1+\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots\right] + \left[1 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}x^2 - \dots\right]}{1 + x + \left[1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots\right]}$$

$$= \frac{2 - \frac{1}{6}x - \frac{17}{72}x^2 + \dots}{2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots} = \frac{\left[1 - \frac{1}{12}x - \frac{1}{144}x^2 + \dots\right]}{\left[1 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{16}x^2 + \dots\right]}$$

$$= \left[1 - \frac{1}{12}x - \frac{1}{144}x^2 + \dots\right]\left[1 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{16}x^2 + \dots\right]^{-1}$$

$$= \left[1 - \frac{1}{12}x - \frac{1}{144}x^2 + \dots\right]\left[1 - \left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{16}x^2 + \dots\right) + \dots\right]$$

$= 1 - \dfrac{5}{6}x + \dots = 1 - \dfrac{5}{6}x \quad$ (x की उच्च घातों को छोड़ने पर)

90. (b) $\dfrac{(1-3x)^{1/2} + (1-x)^{5/3}}{2\left(1-\dfrac{x}{4}\right)^{1/2}}$

$$= \frac{\left[\left\{1 + \frac{1}{2}(-3x) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}(-3x)^2 + \dots\right\} + \left\{1 + \frac{5}{3}(-x) + \frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(-x)^2 + \dots\right\}\right]}{2\left[1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{4}\right)^2 + \dots\right]}$$

$$= \frac{2\left[1 - \frac{19}{12}x + \frac{41}{144}x^2 - \dots\right]}{2\left[1 - \frac{x}{8} - \frac{1}{128}x^2 - \dots\right]}$$

$$= \left[1 - \frac{19}{12}x + \frac{41}{144}x^2 - \dots\right]\left[1 - \frac{x}{8} - \frac{1}{128}x^2 - \dots\right]^{-1}$$

$$= \left[1 - \frac{19}{12}x + \frac{41}{144}x^2 - \dots\right]\left[1 + \left(\frac{x}{8} + \frac{1}{128}x^2 + \dots\right) + \dots\right]$$

$$= 1 - \frac{35}{24}x + \dots$$

x की उच्च घात छोड़ने पर,

$$a + bx = 1 - \frac{35}{24}x$$

तुलना करने पर, $\quad a = 1, b = -\dfrac{35}{24}$